



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Управление качеством»

**РАНЖИРОВАНИЕ ГРАФА,
МОДЕЛИРУЮЩЕГО СТРУКТУРУ СИСТЕМЫ**

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине "Системный анализ"

Авторы:

Димитров Валерий Петрович
Борисова Людмила Викторовна
Зубрилина Елена Михайловна



Ростов-на-Дону, 2014



Аннотация

Методические указания предназначены для бакалавров по направлению подготовки 221700 Стандартизация и метрология.

Печатается по решению методической комиссии факультета «Приборостроение и техническое регулирование».

Авторы

Заведующий кафедрой «Управление качеством» ДГТУ д.т.н., профессор Димитров Валерий Петрович;

Профессор кафедры «Управление качеством» д.т.н. Борисова Людмила Викторовна;

Доцент кафедры «Управление качеством» к.т.н. Зубрилина Елена Михайловна.





Оглавление

РАНЖИРОВАНИЕ ГРАФА, МОДЕЛИРУЮЩЕГО СТРУКТУРУ СИСТЕМЫ	4
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	10
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.....	10



Системный анализ **РАНЖИРОВАНИЕ ГРАФА, МОДЕЛИРУЮЩЕГО СТРУКТУРУ СИСТЕМЫ**

Рангом вершины называется такое целое число, что все входящие в эту вершину ребра исходят из вершин более низких рангов. Ранжированием графа называется назначение рангов всем его вершинам.

Задача ранжирования графа разрешима тогда и только тогда, когда граф не содержит ни одного контура. Применительно к системам это означает, что система, структура которой моделируется данным графом, не должна содержать обратных связей.

При анализе систем ранжирование применяется довольно часто. Например, если вершинами графа изобразить дисциплины, изучаемые в ВУЗе, а ребрами – использование знаний и навыков, полученных при изучении других дисциплин, то получится следующий граф (рис. 1):

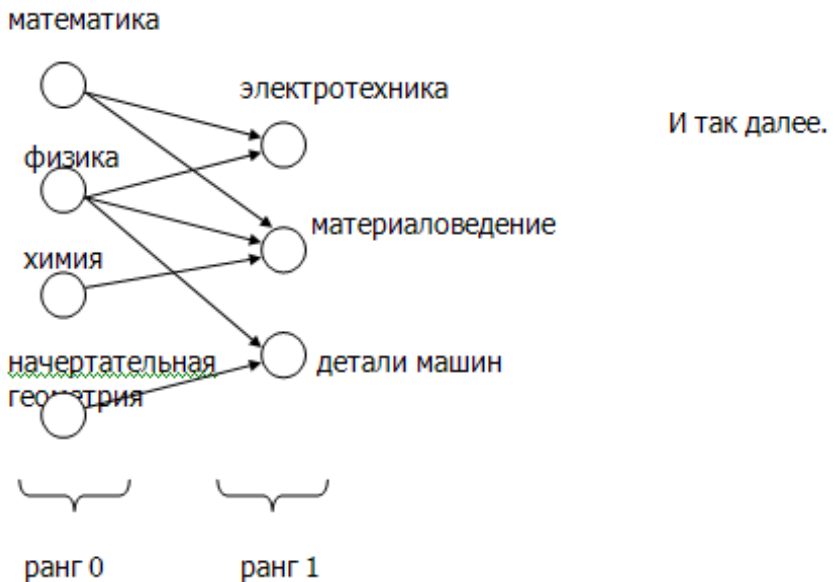


Рис.1. Схема графа дисциплин

Передача знаний и навыков происходит только от дисци-



Системный анализ

пelin, изученных ранее, к дисциплинам, изучаемым позднее, но не наоборот. Это означает, что все дисциплины, изучаемые в ходе обучения, должны быть распределены по семестрам с помощью ранжирования.

Другим примером ранжирования графа является установление субординаций в семье. Если в качестве вершин графа изобразить членов семьи, а ориентированными ребрами обозначить обязательные для исполнения указания, то для многих семей (патриархальный тип семьи) будет характерна следующая ранжированная структура (рис. 2):

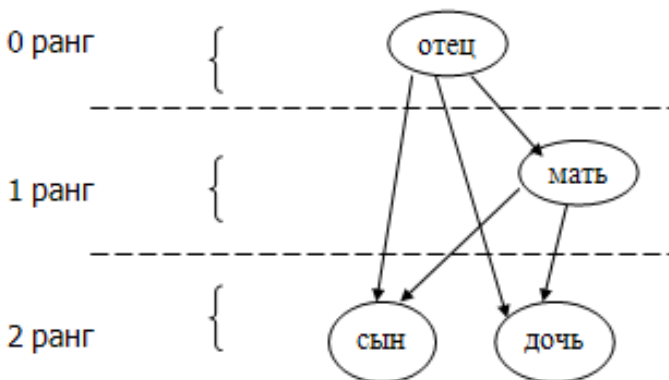


Рис. 2. Схема графа для «семьи патриархального типа»

В современном типе семьи, где муж и жена фактически равноправны, структура этой малой социальной системы может быть ранжирована только в том случае, когда муж и жена не дают друг другу указаний, обязательных к исполнению, иначе структура не может быть ранжирована из – за контура, проходящего через вершины «Отец» и «Мать» (рис. 3).

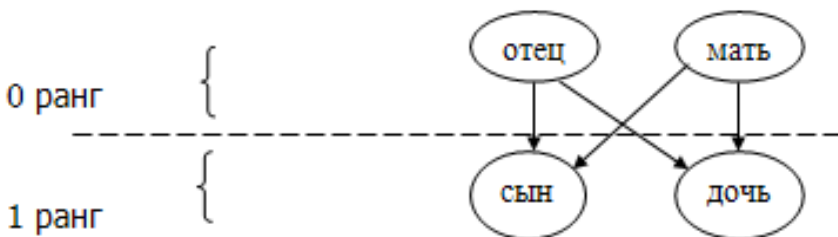


Рис. 3. Схема графа «семьи современного типа»



Системный анализ

Еще более сложной, но так же не поддающейся ранжированию, получается структура семьи, где брат и сестра (примерно одного возраста) пытаются давать друг другу обязательные к исполнению указания.

Такого рода неранжированная структура социальных систем (не только малых, например «Союз» России с Белоруссией) приводит к конфликтным ситуациям.

Студенты должны понимать, что в тех производственных, экономических, коммерческих системах, где им предстоит работать (а также, возможно, которые им предстоит создавать в качестве руководителей фирм или менеджеров) структура управления должна быть тщательно ранжирована во избежание конфликтных ситуаций и потери управления. В частности, недопустимы структуры типа изображенной на рис. 4, когда возможны противоречивые указания двух органов управления.

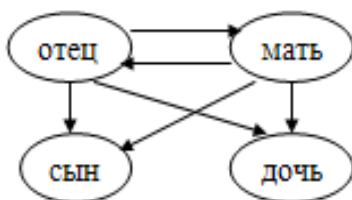


Рис. 4. Недопустимая структура системы

Алгоритмы ранжирования. Для ранжирования графа должна быть задана его матрица *инциденций*. Это квадратная матрица, имеющая столько строк и столбцов, сколько вершин графа. Если из вершины с номером i в вершину с номером j есть ребро (дуга), то в строке i и в столбце j стоит 1 (единица). Если таких ребер несколько (параллельные дуги), то в строке i и в столбце j ставится натуральное число – количество этих ребер. Если из вершины i в вершину j ребра нет, то на пересечении строки i и столбца j стоит 0 (ноль).

Алгоритмов ранжирования всего два – прямой и обратный. Прямой проще, обратный несколько сложнее из за того, что число рангов графа заранее неизвестно.

Пусть граф задан следующей матрицей инциденций (табл. 1).

Таблица 1 – Примен матрицы инциденций

из вершины \ в вершину	1	2	3	4
	1	0	1	1



Системный анализ

2	0	0	1	0
3	0	0	0	0
4	1	0	0	0

Прямой алгоритм начинается с нахождения всех корней графа, т.е. тех его вершин, в которые не заходит ни одно ребро. Если вершина с номером j является корнем, то в столбце с номером j стоят все нули, и наоборот. Значит, задача нахождения всех корней графа состоит в нахождении всех нулевых столбцов его матрицы инцидентий. В приведенном модельном примере такой столбец только один и соответствует 4-й вершине. Вычеркивая эту вершину вместе с исходящими из нее ребрами, получаем подграф исходного графа. В матрице инцидентий ребра, исходящие из 4-й вершины, обозначаются единицами в 4-й строке. Значит, вычеркивание 4-й вершины вместе с исходящими из нее ребрами означает вычеркивание в матрице инцидентий 4-го столбца и 4-й строки, в результате чего получается матрица меньшей размерности (табл. 2).

Таблица 2 – Иллюстрация 2 этапа алгоритма

	1	2	3
1	0	0	1
2	0	0	1
3	0	1	0

Вершина 4 записывается как имеющая младший ранг (0). Из-за того, что вычеркнута единица, стоявшая в 4-й строке и 1-м столбце, появился нулевой столбец (соответствующий 1-й вершине), которого раньше не было. Это значит, что в новом графе на 3-х вершинах, который является подграфом исходного, 1-я вершина является корнем. Таким образом, алгоритм повторяется для подграфа исходного графа. Вычеркиваем 1-ый столбец и 1-ую строку, при этом исчезает единица в 1-й строке и 2- столбце и появляется новый нулевой столбец, соответствующей вершине 2 (табл. 3).

Таблица 3 – Иллюстрация 2 этапа алгоритма

	2	3
2	0	1
3	0	0



Системный анализ

Вычеркивание 1-го столбца и 1-ой строки означает, что 1-я вершина имеет следующий ранг, т.е. первый. Теперь вычеркиваются строка и столбец, соответствующие вершине 2. Эта вершина имеет ранг 2. Вершина 3 оказывается листом графа, т.е. из нее не выходит не одно ребро (что можно было видеть из матрицы инцидентий исходного графа), и имеет ранг 3. Таким образом, исходный граф имеет всего 4 ранга: 0, 1, 2 и 3. В ранжированном виде он изображается следующим образом (рис. 5).

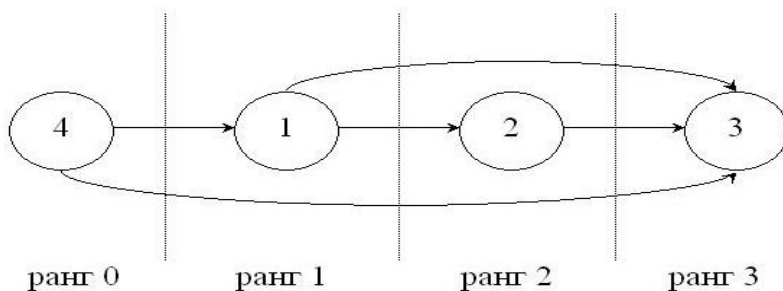


Рис. 5. Схема ранжированного графа

Как видим, в каждую вершину заходят ребра только из вершины более низких рангов.

Разумеется, в каждом ранге могут находиться более одной вершины, если на очередном шаге алгоритма окажется несколько нулевых столбцов. Когда все вершины размещены по своим рангам, ребра между ними изображаются на основе исходной матрицы инцидентий.

Ввиду малого числа вершин граф, изображенный на рис. 5, легко может быть отранжирован и без матрицы инцидентий, если он изначально изображен графически как на рис. 6.

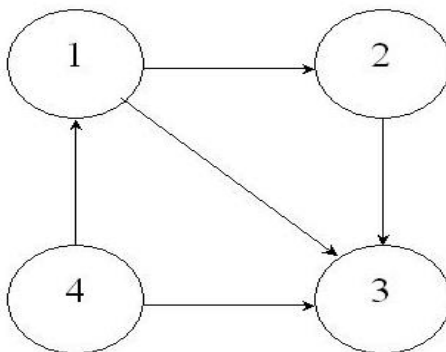


Рис.6



Системный анализ

Очевидно, что вершина 4 является корнем, а вершина 3 - листом этого графа.

Однако графы, моделирующие структуру реальных систем, содержат сотни, а иногда и тысячи вершин. Их ранжирование может быть выполнено только с помощью алгоритмов, реализуемых на ЭВМ.

Обратный алгоритм отличается от прямого тем, что на каждом шаге находятся не корни, а листья - вначале исходного графа, а затем его подграфов. Соответственно отыскиваются не нулевые столбцы, а нулевые строки матрицы инцидентий. Поскольку число рангов заранее неизвестно, максимальный ранг обозначают через N и присваивают его листьям исходного графа. Отбрасывая листья вместе с входящими в них ребрами, получают подграф исходного графа, находят в нем листья и присваивают им ранг $N-1$ и т.д. Последним вершинам, которые оказываются корнями исходного графа, присваивают ранг 0, после чего находится максимальный ранг N . Можно показать, что обратный алгоритм ранжирования сводится к прямому алгоритму для инвертированного графа, т.е. в котором все ребра имеют противоположное направление по отношению к исходному графу. Инвертированный граф имеет матрицу инцидентий, транспонированную по отношению к матрице инцидентий исходного графа.

Если на каком-то шаге прямого алгоритма не окажется ни одного нулевого столбца, то это означает, что в очередном подграфе имеется контур, и этот подграф не может быть ранжирован. Тот же вывод следует, если на каком-то шаге обратного алгоритма не окажется ни одной нулевой строки. Соответственно исходный граф содержит хотя бы один контур и задача ранжирования для него неразрешима. Для таких графов указанные алгоритмы применяются с целью выделения в исходном графе компонент сильной связности.

Варианты заданий приведены в приложениях к методическим указаниям, в которых представлены матрицы инцидентий исходных графов, подлежащих ранжированию. Во всех заданиях контура отсутствуют, задача ранжирования разрешима.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Введение в системный анализ: учеб.пособие / В.П. Димитров, Л.В. Борисова, Б.Б. Жмайлов – 2-е изд., испр. и доп. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2013. – 77 с.



Системный анализ

2. Системный анализ и принятие решений: учебное пособие / С.А. Баркалов, И.С. Суровцев, А.И. Половинкина ; науч.ред. В.Н. Бурков. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – 652 с.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется рангом вершины.
2. Ранжированием графа называется.
3. Задача ранжирования графа.
4. Что такое граф?
5. Что нужно задать, чтобы граф был определен полностью?
6. Схема графа.
7. Каким математическим объектом задается структура системы?
8. Изобразите графовую модель структуры технической системы.
9. Описать алгоритм ранжирования.